

1. PSEUDODERIVATA E PSEUDODIFFERENZIALE COVARIANTE DI UN CAMPO TENSORIALE.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) (con $r,s \neq (0,0)$) su M definita da $D \in \mathcal{L}_s^r$, per ogni $T \in \mathcal{T}_s^r$ e per ogni $K \in \mathcal{T}$, $D_T K$ si chiama *pseudoderivata covariante* di K rispetto a T . Per ogni $K \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}$, considerato come applicazione \mathcal{T} -multilineare di $\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}$ (s' volte) in $\mathcal{T}_0^{r'}$, si chiama *pseudodifferenziale covariante* di K , e si indica DK , il campo tensoriale di specie $(s+r', r+s')$ (considerato come applicazione \mathcal{T} -multilineare di $\underbrace{\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_{s' \text{ volte}} \times \mathcal{T}_s^r$ in $\mathcal{T}_0^{r'}$ definito da:

$$(DK)(X_1, \dots, X_{s'}, T) = (D_T K)(X_1, \dots, X_{s'}).$$

Se $K \in \mathcal{T}$ è somma di campi tensoriali di specie diverse, si chiama *pseudodifferenziale covariante* di K , e si indica DK , la somma degli pseudodifferenziali covarianti dei campi tensoriali delle varie specie.

Si prova che

Proposizione 1.1. - Se $K \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}$, allora per ogni $X_1, \dots, X_{s'} \in \mathcal{X}$ e per ogni $T \in \mathcal{T}_s^r$, risulta:

$$(DK)(X_1, \dots, X_{s'}, T) = D_T(K(X_1, \dots, X_{s'})) - \sum_{i=1}^{s'} K(X_1, \dots, D_T X_i, \dots, X_{s'}).$$

Se $K \in \mathcal{T}$, $D(DK) = D^2 K$ si chiama *pseudodifferenziale covariante secondario* di K , e in generale $D^m K$, pseudodifferenziale covariante m -esimo di K , è definito induttivamente da:

$$D^m K = D(D^{m-1} K) .$$

Se $A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s h}$ e $\Gamma_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s h}$ sono le componenti di Γ rispetto ad

una carta locale (U, ϕ) di M con $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ e se x^i sono le componenti di $X \in \mathcal{X}$ rispetto alla stessa carta locale, allora le componenti

$X_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s h}$ di DX sono:

$$X_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s h} = x^i \Gamma_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s h} + \frac{\partial X^h}{\partial x^k} A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s k} .$$

Infatti posto $e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$ risulta:

$$(D_U)_{e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}} (x^i e_i) = x^i (D_U)_{e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}} e_i + A(e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}, x^i) e_i =$$

$$= x^i \Gamma_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s h} e_h + \frac{\partial X^h}{\partial x^k} A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s k} e_h .$$

In generale se $K \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}$ ha componenti $K_{j_1 \dots j_{s'}}^{i_1 \dots i_{r'}}$ rispetto alla carta

locale (U, ϕ) , le componenti $K_{k_1 \dots k_{r'} j_1 \dots j_{s'}}^{h_1 \dots h_{s'} i_1 \dots i_{r'}}$ di DK sono:

$$K_{k_1 \dots k_{r'} j_1 \dots j_{s'}}^{h_1 \dots h_{s'} i_1 \dots i_{r'}} = A_{k_1 \dots k_{r'}}^{h_1 \dots h_{s'} h} \frac{\partial K_{j_1 \dots j_{s'}}^{i_1 \dots i_{r'}}}{\partial x^h} + \sum_{x=1}^{r'} K_{j_1 \dots j_{s'}}^{i_1 \dots h \dots i_{r'}} \Gamma_{k_1 \dots k_{r'}}^{h_1 \dots h_{s'} h_c} .$$

$$= \sum_{\beta=1}^{s'} K_{j_1 \dots h \dots j_{s'}}^{i_1 \dots i_r, h_1 \dots h_s} \Gamma_{k_1 \dots k_r j_\beta} \quad .$$

Se r è una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da $D \in \mathcal{L}_s^r$, il campo tensoriale $A \in \mathcal{Z}_r^{s+1}$ definito da $A(T,f) = D_T f$ può essere considerato come applicazione \mathcal{Z} -lineare \mathcal{A} di \mathcal{Z}_s^r in \mathcal{X} tale che ad ogni $T \in \mathcal{Z}_s^r$ associa $\mathcal{A}(T) \in \mathcal{X}$ definito per ogni $f \in \mathcal{Z}$ da $\mathcal{A}(T)f = D_T f$.

Nel seguito con abuso di notazione si indicherà \mathcal{A} con A .

Fissato $\omega \in \mathcal{Z}_s^0$, si ponga per ogni $(X_0, X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{X}^{r+1}$

$$L_\omega(X_0, \dots, X_r) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_r} \varepsilon(\sigma) \{ [A(X_{\sigma(0)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r-1)} \otimes \omega), X_{\sigma(r)}] - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i A(X_{\sigma(0)} \otimes \dots \otimes$$

$$\otimes [X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(i+1)}] \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r)} \otimes \omega) \}$$

dove con \mathcal{G}_r si è indicato l'insieme delle permutazioni di $\{0, \dots, r\}$

Ebbene l'applicazione $S_\omega : (X_0, \dots, X_r) \rightarrow S_\omega(X_0, \dots, X_r)$ di \mathcal{X}^{r+1} in \mathcal{X} così definita:

$$S_\omega(X_0, \dots, X_r) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{G}_r} \varepsilon(\sigma) D_{X_{\sigma(0)}} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r-1)} \otimes \omega \otimes X_{\sigma(r)} - L_\omega(X_0, \dots, X_r) \right)$$

è un campo tensoriale di specie $(1, r+1)$ che viene chiamato ω -torsione di r .

Si osservi che per $r = 1, s = 0, \omega = 1_{\mathcal{Z}}$ (funzione di costante valore 1) si ottiene l'ordinario campo tensoriale di torsione di una pseudocon-

nessione lineare.

2. ESISTENZA ED ESTENSIONE DI PSEUDOCONNESSIONI LINEARI DI SPECIE (r,s) .

Si proverà la seguente:

Proposizione 2.1. - Se M è una varietà paracompatta, per ogni $A \in \mathcal{T}_r^{s+1}$ esiste una pseudoconnessione lineare Γ di specie (r,s) su M , tale che, indicata con D la pseudodifferenziazione covariante rispetto a Γ , il campo tensoriale $(T,f) \in \mathcal{T}_s^r \times \mathcal{F} \rightarrow D_T f \in \mathcal{F}$ coincide con A .

Dimostrazione. Essendo M paracompatta, esiste una famiglia di carte ammissibili $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ tale che

- a) $(U_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento di M localmente finito;
- b) $\forall i \in I \quad \bar{U}_i$ è compatto;
- c) esiste una partizione dell'unità $(f_i)_{i \in I}$ subordinata al ricoprimento $(U_i)_{i \in I}$

Per ogni $i \in I$ sia Γ_i una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) su U_i tale che, indicata con D_i la pseudodifferenziazione covariante rispetto a Γ_i , il campo tensoriale $A_i \in \mathcal{T}_r^{s+1}(U_i)$ definito da

$$A_i(T', g') = D_{iT'} g' \quad \forall g' \in \mathcal{F}(U_i), \forall T' \in \mathcal{T}_s^r(U_i)$$

coincida con $A|_{U_i}$.

Per ogni $i \in I$ si indichi con D'_i l'elemento di \mathcal{L}_s^r definito così